Lec 16 函数极限的 24 种科学定义

16.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

定义 16.1 (数列极限)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M.$

♣

例 16.1 $\forall k \in N^*$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$.

证明 $\forall M > 0$, 要使 $n^k > M$, 只需 $n > M^{1/k}$, 取 $N = \max\{M^{1/k}, 1\}$, 则当 $n > N$ 时, $n^k > M$.

16.2 函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义法

定义 16.2

设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的右极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon;$$

若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的左极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

♣

考虑 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$,$\beta$ 可以是常数 $A, +\infty, -\infty, \infty$. α 可以是常数 $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$. 一共有 24 种情况. 具体而言, 有以下情况:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$

8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)<-M.$
9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)<-M.$
10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M.$
11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)|>M.$
12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists \delta>0, \forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$
13. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X_0>0, \forall x>X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
14. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X_0>0, \forall x<-X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
15. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
16. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall x>X_0 \Rightarrow f(x)>M.$
17. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall x>X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$
18. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$
19. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall x<-X_0 \Rightarrow f(x)>M.$
20. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall x<-X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$
21. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$
22. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)>M.$
23. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$
24. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$

注 也有的时候将函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限记为 $f(x_0-0)$, 右极限记为 $f(x_0+0)$.

定理 16.1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.($x_0$ 为常数)

证明 $\Rightarrow$: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 即对 $\forall 0<x-x_0<\delta \Leftrightarrow x_0<x<x_0+\delta$ 有 $|f(x)-a|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$.

$\Leftarrow$: $\forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0, \forall x, x_0<x<x_0+\delta_1 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 对上述 ε, $\exists \delta_2>0, \forall x, x_0-\delta_2<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $\forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

定理 16.2

$\lim\limits_{x\to\infty} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

证明 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$. 即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f(\dfrac{1}{t})=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0^+} f(\dfrac{1}{t})=a=\lim\limits_{t\to 0^-} f(\dfrac{1}{t}) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

上述最后一个等式由 $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\dfrac{1}{t}) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{t\to 0^-} f(\dfrac{1}{t}) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 给出.

例 16.2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = \mathrm{e}$.

16.3 函数极限的四则运算法则

定理 16.3

设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数，令 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, 则:

1. $\lim_{x\to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$; 特别地, $\lim_{x\to x_0} f^2(x) = a^2$;
3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

证明

1. 目的时要证明对于任意的正数 ϵ, 能够找到一个正数 δ, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|(c_1 f(x) + c_2 g(x)) - (c_1 a + c_2 b)| \leq \epsilon$。
   由极限的定义，存在 δ_1, δ_2，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|},$$
   当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，
   $$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|}.$$
   取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，同时有
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|},$$
   因此有
   $$|c_1 f(x)+c_2 g(x)-(c_1 a+c_2 b)| = |c_1(f(x)-a)+c_2(g(x)-b)| \leq |c_1||f(x)-a|+|c_2||g(x)-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
2. 证明类似于第一小题。对于任意的正数 ϵ，存在 δ_1 和 δ_2，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|},$$
   当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，
   $$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}.$$
   取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，同时有
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|},$$
   因此有
   $$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - af(x) + af(x) - ab| \leq |f(x)||g(x) - b| + |g(x) - b||f(x) - a|.$$
   由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近连续，故当 $x \to x_0$ 时，$|f(x)|$ 和 $|g(x)|$ 被有界地控制。因此我们有
   $$|f(x)g(x) - ab| < \epsilon.$$
3. 因为 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$，且 $\lim_{x\to x_0} g(x) = b \neq 0$，我们只需证明数列 $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ 收敛于 $\dfrac{1}{b}$。

假设 $b>0$，则

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{|g(x)-b|}{|g(x)b|}\right|.$$

由于 $g(x)$ 收敛于 b，一方面对于正数 $b/2>0$，存在 δ_1，使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，

$$|g(x)-b|<\frac{b}{2},$$

另一方面，对于任意给定的正数 ϵ，存在 δ_2，使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，

$$|g(x)-b|<\frac{b^2\epsilon}{2}.$$

所以，当 $|x-x_0|<\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ 时，

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{b}\right|\leq |g(x)-b|\cdot\frac{2}{b^2}\cdot\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{b}.$$

注 函数极限: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in R$ 也是有" 四性", 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.

定理 16.4 (函数极限的局部有界性)

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I, 点 $x_0\in I$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 即 $\exists\delta>0,\exists M>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)|<M$.

证明 局部有界性的证明: 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I, 点 $x_0\in I$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon\Leftrightarrow|f(x)|<|a|+\varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 但 $f(x)$ 在整个定义域 I 内未必有界.

16.4 3 个重要极限及其证明

命题 16.1

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$

证明

1. 首先考虑右极限。设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x>0$, 由引理易知

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\quad 即\quad \frac{\sin x}{x}<\frac{\cos x}{x}<1.$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 < 2\sin\frac{x}{2} < x.$$

所以，由两边夹的得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

当 $x \to 0$ 时，令 $y = -x$，则 $y \to 0^+$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

2. 由于对于任意的 $x > 1$, 有 $[x] \le x < [x] + 1$, 以及

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x,$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^x = \mathrm{e}.$$

根据两边夹定理，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

当 $x \to \infty$ 时，令 $y = -x$, 则 $y \to -\infty$, 利用上面结果，就有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{1-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1} = \mathrm{e}.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

3. (a). 当 $m > n$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^{n-m} + a_1x^{n-m-1} + \cdots + a_nx^{n-m}}{b_0 + b_1x^{m-n-1} + \cdots + b_mx^{m-n}} = \dfrac{a_0\cdot 0 + a_1\cdot 0 + \cdots + a_n\cdot 0}{b_0 + b_1\cdot 0 + \cdots + b_m\cdot 0} = \dfrac{0}{b_0} = 0.$

(b). 当 $m = n$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} = \dfrac{a_0}{b_0}.$

(c). 当 $m < n$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \infty.$

这三个重要极限可以作为公式任意使用.

✍ 作业 ex1.3:1(2)(3),2(2)(4),3(2),5(1)(2),9(3)(4),10(3);CH1:13.